

Sucesiones

1. Escribe los cuatro primeros términos y el décimo término de las siguientes sucesiones.

- a)  $a_n = 3n - 2$       c)  $c_n = n^3 - 1$       e)  $e_n = (-1)^{n+1}$   
b)  $b_n = 5 - 2n$       d)  $d_n = \frac{3}{n+2}$       f)  $f_n = 2 \cdot 3^{n-2}$

2. Escribe los tres términos siguientes de estas sucesiones.

- a)  $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5} \dots$       c) 2, 6, 12, 20, 30...  
b) -1, 8, -27, 64...      d) 4, 8, 12, 16, 20...

3. Escribe los términos generales de las sucesiones del ejercicio anterior.

4. Calcula los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia.

- a)  $a_1 = 1; a_n = a_{n-1} + 3$       c)  $c_1 = 1; c_2 = 7; c_n = \frac{c_{n-1} + c_{n-2}}{2}$   
b)  $b_1 = \frac{1}{12}; b_n = 2b_{n-1}$       d)  $d_1 = 5; d_2 = 7; d_n = 2 \cdot (d_{n-1} + d_{n-2})$

Soluciones de la actividad 1.

- a)  $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 7, a_4 = 10, a_{10} = 28$       d)  $d_1 = 1, d_2 = \frac{3}{4}, d_3 = \frac{3}{5}, d_4 = \frac{1}{2}, d_{10} = \frac{1}{4}$   
b)  $b_1 = 3, b_2 = 1, b_3 = -1, b_4 = -3, b_{10} = -15$       e)  $e_1 = 1, e_2 = -1, e_3 = 1, e_4 = -1, e_{10} = -1$   
c)  $c_1 = 0, c_2 = 7, c_3 = 26, c_4 = 63, c_{10} = 999$       f)  $f_1 = \frac{2}{3}, f_2 = 2, f_3 = 6, f_4 = 18, f_{10} = 13\ 122$

Soluciones de la actividad 2.

- a)  $\frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}$       b) -125, 216, -343      c) 42, 56, 72      d) 24, 28, 32

Soluciones de la actividad 3.

- a)  $a_n = \frac{n+2}{n+1}$       b)  $b_n = (-1)^n \cdot n^3$       c)  $c_n = n \cdot (n+1)$       d)  $d_n = 4n$

Soluciones de la actividad 4.

- a)  $a_1 = 7, a_2 = 10, a_3 = 13, a_4 = 16, a_5 = 19$       c)  $c_1 = 5, c_2 = 7, c_3 = 6, c_4 = \frac{13}{2}, c_5 = \frac{25}{4}$   
b)  $b_1 = \frac{1}{12}, b_2 = \frac{1}{6}, b_3 = \frac{1}{3}, b_4 = \frac{2}{3}, b_5 = \frac{4}{3}$       d)  $d_1 = 5, d_2 = 7, d_3 = 24, d_4 = 62, d_5 = 172$

## Progresiones aritméticas

Una **progresión aritmética** es una sucesión cuyos términos se obtienen a partir del anterior sumándole una cantidad fija  $d$ :

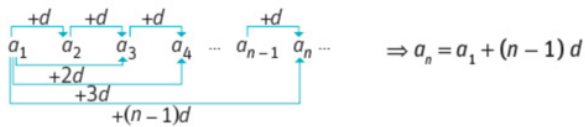
$$a_n = a_{n-1} + d$$

A  $d$  se le llama **diferencia de la sucesión** y puede ser **positiva o negativa**.

- Una sucesión es una progresión aritmética si al restar a cada término su anterior siempre se obtiene el mismo valor:

$$a_n - a_{n-1} = d$$

- En el esquema se puede ver cómo calcular cualquier término a partir del primero:



El **término general** de una progresión aritmética cuyo primer término es  $a_1$  y su diferencia es  $d$  es:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

La **suma,  $S_n$** , de los  $n$  primeros términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

**1. Averigua si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas. Calcula la diferencia en aquellas que lo sean.**

- c) 1, 7, 13, 19, 25...      c)  $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \dots$       e) 4, 9, 16, 25, 36...
- d) -2, 4, 6, 8, -10...      d) 8, 5, 2, -1, -4...      f) 1, 3, 5, 7, 11...

**2. Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas.**

- a) 3, 2, -7, -10...      c)  $\frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \dots$
- b) 11, 13, 15, 17...      d) 1, 2; 1, 6; 2; 2, 4...

**3. Calcula el término general y los términos 100, 200 y 500 de las siguientes progresiones aritméticas.**

- a)  $a_1 = 3, d = 2$       c)  $c_1 = \frac{3}{2}, d = \frac{1}{4}$
- b)  $b_1 = -5, d = -3$       d)  $d_1 = 5, d = -4$

**4. Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas.**

- a)  $a_1 = 3, a_4 = 15$       c)  $c_3 = 7, c_7 = 9$

### 3º ESO-D y A: Profesores: Ana Lares y Alberto Martín.

## Unidad 10 Sucesiones

b)  $b_2 = 6, b_5 = 0$                       d)  $d_1 = -3, d_9 = -19$

5. **Calcula la suma de los veinte primeros términos de las progresiones aritméticas del ejercicio 3.**

### Progresiones geométricas

Una **progresión geométrica** es una sucesión cuyos términos se obtienen a partir del anterior multiplicándolo por una constante fija  $r$ :

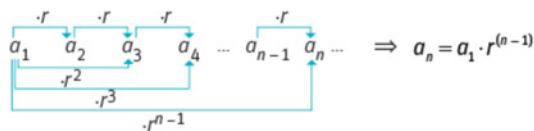
$$a_n = a_{n-1} \cdot r$$

La cantidad fija  $r$  se llama **razón de la sucesión** y puede ser **positiva o negativa**.

- Una sucesión es una progresión geométrica si al dividir cada término entre el anterior siempre se obtiene el mismo valor:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

- En el esquema se puede ver cómo calcular cualquier término a partir del primero:



El **término general** de una progresión geométrica cuyo primer término es  $a_1$  y su razón es  $r$ , es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$$

La **suma  $S_n$**  de los  $n$  primeros términos de una progresión geométrica es:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Si la razón  $r$  de una progresión geométrica cumple que  $|r| < 1$ , entonces, la **suma  $S$**  de sus **infinitos términos** es:  $S = \frac{a_1}{1-r}$

1. **Averigua si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas. Calcula la razón en aquellas que lo sean.**

e)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$

c)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

e)  $2, -4, 8, -16, 32, \dots$

f)  $\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{20}{7}, \frac{40}{7}, \dots$

d)  $1, 3, 3, 9, 27, \dots$

f)  $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}, \dots$

2. **Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas.**

c)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

c)  $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}, \dots$

d)  $2, -4, 8, -16, 32, \dots$

d)  $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

3. **Calcula el término general y la posición 12 de las siguientes progresiones geométricas.**

c)  $a_1 = 3, r = -2$       c)  $c_1 = 81, r = \frac{1}{3}$

d)  $b_1 = 5, r = 0,1$       d)  $d_1 = \frac{1}{4}, r = -2$

4. **Calcula el término general de la siguiente progresión geométrica.**

$a_1 = 3, a_4 = -24$

5. **Calcula la suma de los ocho primeros términos de las progresiones geométricas del ejercicio 3.**

6. **Calcula la suma de los infinitos términos de las progresiones geométricas siguientes.**

a) 81, 27, 9, 3, 1...

b) 50; 5; 0,5; 0,05...

c) 8, 4, 2, 1...

## Progresiones aritméticas

Soluciones de las actividades anteriores.

### 3º ESO-D y A: Profesores: Ana Lares y Alberto Martín.

#### Unidad 10 Sucesiones

1. a) Sí es progresión aritmética:  $d = 6$ .  
b) No es progresión aritmética.  
c) No es progresión aritmética.  
d) Sí es progresión aritmética:  $d = -3$ .  
e) No es progresión aritmética.  
f) No es progresión aritmética.
2. a)  $a_n = 3 + (n - 1) \cdot (-5) = 8 - 5n$   
b)  $b_n = 11 + (n - 1) \cdot 2 = 2n + 9$   
c)  $c_n = \frac{5}{3} + (n - 1) \cdot \frac{1}{3}$   
d)  $d_n = 1,2 + (n - 1) \cdot 0,4 = 0,4n + 0,8$
3. a)  $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 2 = 2n + 1 \Rightarrow a_{100} = 201, a_{200} = 401, a_{500} = 1001$   
b)  $b_n = -5 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n - 2 \Rightarrow b_{100} = -302, b_{200} = -602, b_{500} = -1502$   
c)  $c_n = \frac{3}{2} + (n - 1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{n + 5}{4} \Rightarrow c_{100} = \frac{105}{4}, c_{200} = \frac{205}{4}, c_{500} = \frac{505}{4}$   
d)  $d_n = 5 + (n - 1) \cdot (-4) = 9 - 4n \Rightarrow d_{100} = -391, d_{200} = -791, d_{500} = -1991$
4. a)  $a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow a_4 = a_1 + 3d \Rightarrow 15 = 3 + 3d \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1$   
b) Sustituyendo en la fórmula general:  
$$b_n = b_1 + (n - 1)d \Rightarrow \begin{cases} b_2 = b_1 + d \\ b_5 = b_1 + 4d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = b_1 + d \\ 0 = b_1 + 4d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 8 \\ d = -2 \end{cases} \Rightarrow b_n = 8 - 2(n - 1) = 10 - 2n$$
  
c) Sustituyendo en la fórmula general:  
$$c_n = c_1 + (n - 1)d \Rightarrow \begin{cases} c_3 = c_1 + 2d \\ c_7 = c_1 + 6d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = c_1 + 2d \\ 9 = c_1 + 6d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 6 \\ d = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow c_n = 6 + \frac{1}{2}(n - 1) = \frac{n + 11}{2}$$
  
d)  $d_n = d_1 + (n - 1)d \Rightarrow d_9 = d_1 + 8d \Rightarrow -19 = -3 + 8d \Rightarrow d = -2 \Rightarrow d_n = -3 + (n - 1) \cdot (-2) = -2n - 1$
5. a)  $S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{3 + 41}{2} \cdot 20 = 440$   
b)  $S_{20} = \frac{b_1 + b_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{-5 - 62}{2} \cdot 20 = -670$   
c)  $S_{20} = \frac{c_1 + c_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{\frac{3}{2} + \frac{25}{4}}{2} \cdot 20 = \frac{310}{4} = \frac{155}{2}$   
d)  $S_{20} = \frac{d_1 + d_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{5 - 71}{2} \cdot 20 = -660$

#### Progresiones geométricas

Soluciones de las actividades anteriores.

1. a) No es progresión geométrica.  
 b) Sí es progresión geométrica  $r = 2$ .  
 c) Sí es progresión geométrica:  $r = \frac{1}{2}$ .

- d) No es progresión geométrica.  
 e) Sí es progresión geométrica  $r = -2$ .  
 f) Sí es progresión geométrica:  $r = \frac{3}{2}$ .

2. a)  $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}$   
 b)  $b_n = 2 \cdot (-2)^{(n-1)}$

c)  $c_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{(n-1)}$   
 d)  $d_n = (-1)^{(n-1)}$

3. a)  $a_n = 3 \cdot 2^{(n-1)} \Rightarrow a_{12} = -6144$

c)  $c_n = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)} \Rightarrow c_{12} = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{11} = \frac{3^4}{3^{11}} = \frac{1}{3^7}$

b)  $b_n = 5 \cdot 0,1^{(n-1)} \Rightarrow b_{12} = 5 \cdot 10^{-11}$

d)  $d_n = \frac{1}{4} \cdot (-2)^{(n-1)} \Rightarrow d_{12} = 512$

4. a)  $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)} \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot r^{(n-1)} \Rightarrow -24 = 3 \cdot r^3 \Rightarrow -8 = r^3 \Rightarrow r = -2 \Rightarrow a_n = 3 \cdot (-2)^{(n-1)}$

b) Sustituyendo en la fórmula general:

$$b_n = b_1 \cdot r^{(n-1)} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = b_1 \cdot r \\ b_6 = b_1 \cdot r^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,0006 = b_1 \cdot r \\ 6 = b_1 \cdot r^5 \end{cases} \Rightarrow r^4 = 10\,000 \Rightarrow r = 10 \Rightarrow b_1 = 0,00006 \Rightarrow b_n = 0,00006 \cdot 10^{(n-1)}$$

5. a)  $S_8 = \frac{a_8 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{3 \cdot (-2)^7 \cdot (-2) - 3}{-2 - 1} = -255$

c)  $S_8 = \frac{c_8 \cdot r - c_1}{r - 1} = \frac{81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \frac{1}{3} - 81}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{6560}{54} = \frac{3280}{27}$

b)  $S_8 = \frac{b_8 \cdot r - b_1}{r - 1} = \frac{5 \cdot 0,1^7 \cdot 0,1 - 5}{0,1 - 1} = 5,56$

d)  $S_8 = \frac{d_8 \cdot r - d_1}{r - 1} = \frac{\frac{1}{4} \cdot (-2)^7 \cdot (-2) - \frac{1}{4}}{-2 - 1} = \frac{64 - \frac{1}{4}}{-3} = \frac{255}{-12} = \frac{-85}{4}$

6. a)  $S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{81}{1-\frac{1}{3}} = \frac{243}{2}$

b)  $S_\infty = \frac{b_1}{1-r} = \frac{50}{1-\frac{1}{10}} = \frac{500}{9}$

c)  $S_\infty = \frac{c_1}{1-r} = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = 16$