Funciones. Límites y Continuidad. Derivadas. Funciones elementales

Funciones.

El dominio de una función puede verse restringido por la propia definición de la función o el contexto real en el que se utiliza. Según la expresión de la función:

- Si la expresión es polinómica, la función está definida en todo el conjunto de los números reales.
- Si la expresión contiene "x" en el denominador, la función no está en los valores que anulan el denominador.
- Si la expresión es radical de índice par, entonces la función está definida para radicandos positivos. Si la expresión es radical de índice impar, el dominio de la función coincide con el dominio de la función radicando.
- Si la expresión es exponencial, entonces el dominio de la función coincide con el dominio de la función del exponente.
- Si la expresión es logarítmica, entonces la función sólo está definida para números reales positivos.

1. Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{5}x$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x + 7}$

e) $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 1}$

f) $f(x) = \frac{-2x}{x^2 + 2x - 15}$

g) $f(x) = \sqrt{x}$

h) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 6x}$

i) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$

j) $f(x) = \sqrt{x^2 + 7x + 10}$

k) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x + 13}$

l) $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$

m) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$

n) $f(x) = \log x$

o) $f(x) = \log(2x + 3)$

p) $f(x) = \ln(x^2 + 2x - 8)$

2. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

i) $f(x) = \frac{x - 8}{\sqrt{x + 1}}$

j) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1}}{x + 5}$

k) $f(x) = \frac{2}{5} - \log(x + 4)$

l) $f(x) = \ln\left(\frac{2x + 7}{x^2 - x - 20}\right)$

e) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2 - 100}}$

f) $f(x) = 7^{\sqrt{x^2 + 7x - 12}}$

g) $f(x) = e^{\frac{3}{x^2 - 18x + 81}}$

h) $f(x) = \frac{3x - 5}{\log(x^2 + 6x - 7)}$

Funciones. Límites y Continuidad. Derivadas. Funciones elementales

Derivadas.

1. Calcula la derivada de cada función.

a) $f(x)=3x^2$

j) $f(x)=\log e^x$

b) $f(x)=-5x^4+10x^3-6x^2+x-\dfrac{1}{2}$

k) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{10x+4}{10x-4}}$

c) $f(x)=(x+4)(2x^2-2)$

l) $f(x)=\sqrt{\ln\dfrac{10x+4}{10x-4}}$

t) $f(x)=\operatorname{sen}(-5x^2+10)$

d) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

u) $f(x)=\cos\sqrt{x+1}$

e) $f(x)=\dfrac{4x^3+9x^2}{3x+5}$

f) $f(x)=\sqrt{16x+1}$

ñ) $f(x)=\operatorname{sen}(6x+2)$

w) $f(x)=\ln\dfrac{1}{3x}+7x^2$

g) $f(x)=\sqrt[3]{-x^2+5}$

x) $f(x)=\cos(\cos x)$

h) $f(x)=\sqrt[12]{3x^{10}+\dfrac{1}{3}x^9-\dfrac{5}{6}x^8+7x^3+19}$

y) $f(x)=6(\ln x)^2-10\ln x+2$

i) $f(x)=\log(3x-2)$

p) $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{3}{x}+\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$

2. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=e^{4x+9}+\ln(4x+9)$

h) $f(x)=\dfrac{8x^4+5x^3+x^2}{\operatorname{sen}(x^2+x+3)}$

n) $f(x)=\dfrac{\cos(\ln x)}{x}$

c) $f(x)=\cos^3\sqrt{x}$

ñ) $f(x)=\ln(x-3)\cdot(x+3)$

d) $f(x)=\operatorname{sen}^2(x^2+3x-1)$

j) $f(x)=\sqrt[100]{\ln x^2}$

e) $f(x)=\log(\log(\dfrac{1}{x}))$

k) $f(x)=\dfrac{1-\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}$

p) $f(x)=\cos(-x^3+\ln x^2)$

f) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}}$

l) $f(x)=\sqrt{\cos^2 x-\cos x}$

q) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-10x}{x^4-2}}+6x^2-12$

Ejercicios Propuestos del libro de texto: 63, 64 y 65 página 199.

Funciones. Límites y Continuidad. Derivadas. Funciones elementales

Funciones elementales.

1. **Gráfica y propiedades globales de una función.**

Puntos de corte con los ejes y signo de una función.

Si un punto de la gráfica de una función f está en el eje de abscisas, X, es de la forma $(a, 0)$; por tanto:

> Los **puntos de corte** de la función f con el **eje X** se hallan resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.

Puede haber más de un punto de corte de una función con el eje X.

Por otra parte, los puntos que pertenecen al eje de ordenadas, Y, tienen por coordenadas $(0, a)$. Así:

> El **punto de corte** de la función f con el **eje Y** es el punto $(0, f(0))$.

Como máximo hay un punto de corte con el eje Y, ya que si no, f no sería función.

Ejemplo **Halla los puntos de corte con los ejes de la función $f(x) = (x - 6)(x - 2)$.**

Con el eje X: Se resuelve la ecuación $f(x) = 0$.

$(x - 6)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 6$ y los puntos de corte son $(2, 0)$ y $(6, 0)$.

Con el eje Y: Se calcula el valor de la función para $x = 0$.

$f(0) = 12$ y, por tanto, el punto de corte con el eje Y es $(0, 12)$.

Para representar la gráfica de una función f es útil saber en qué zonas queda dicha gráfica por encima o por debajo del eje X. Es decir para qué valores del dominio de f se cumple que $f(x) > 0$ y para cuáles es $f(x) < 0$. Para ello, se señalan los puntos dónde f corta al eje X y los puntos de discontinuidad, para después estudiar el signo de la función en los tramos en que el eje queda dividido.

Ejemplo **Determina el signo de la función $f(x) = (x - 6)(x - 2)$.**

Hay que resolver la inecuación $f(x) > 0$.

En este caso, al estar ya factorizado la función polinómica f, basta con construir la tabla de signos de sus factores de donde resulta:

	$-\infty$ a 2	2 a 6	6 a $+\infty$
$x - 6$	$-$	$-$	$+$
$x - 2$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

$f > 0$ en $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$ y $f < 0$ en $(2, 6)$

A la izquierda se ha representado la función con las zonas de diferente signo.

Simetría

Funciones. Límites y Continuidad. Derivadas. Funciones elementales

Una función es **simétrica respecto del eje de ordenadas *Y***, si se cumple que:

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D(f)$$

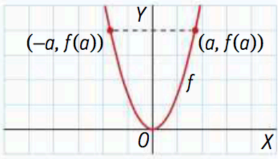
Una función que presenta este tipo de simetría se denomina **función par**.

Ejemplo ▸ **Comprueba que la función $f(x) = x^2$ es par.**

Al aplicar la definición de función par, se tiene:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \Rightarrow \text{función par}$$

En la figura se aprecia la simetría respecto del eje de ordenadas.



Una función es **simétrica respecto del origen de coordenadas** si se cumple que:

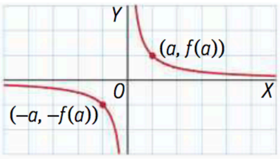
$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D(f)$$

Una función que presenta este tipo de simetría se denomina **función impar**.

Ejemplo ▸ **Comprueba que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es impar.**

Utilizando la definición de función impar:

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x) \Rightarrow \text{función impar}$$



En la figura se observa la simetría respecto del origen de coordenadas.

Ejercicios Propuestos: 2 y 3 página 207.

2. **Representación de funciones polinómicas.**

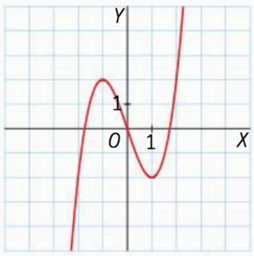
Esquema general para el estudio y representación de funciones.
1º Dominio y continuidad.
2º Simetría
3º Periodicidad.
4º Puntos de corte con los ejes y signo. (El signo de *f* se averigua a partir de los puntos de corte con el eje X y de discontinuidad de *f*).
5º Asíntotas.
6º Crecimiento y puntos singulares.
7ºConcavidad y puntos de inflexión.
8ºRepresentación gráfica.

Ejercicio propuesto: El ejercicio resuelto no sigue el orden del esquema general anterior, debéis completarlo y modificarlo.

Funciones. Límites y Continuidad. Derivadas. Funciones elementales

EJERCICIO RESUELTO

4. **Haz un estudio de la $f(x) = x^3 - 3x$ y compara los resultados obtenidos con su gráfica.**



Como f es un polinomio, su dominio es $\mathbb{R}$, es una función continua y no tiene asíntotas.

1.º Puntos de corte con los ejes y signo.

- Con el eje Y ($x = 0$): $f(0) = 0$. $(0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.
- Con el eje X ($f(x) = 0$): $x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = x\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right) = 0$.

Por tanto, hay tres puntos de corte con el eje X:

$$\left(-\sqrt{3},0\right),\ (0,\ 0)\ \text{y}\ \left(\sqrt{3},0\right)$$

Ahora se construye la tabla de signos de f y se llega a:

$$f > 0 \text{ en } \left(-\sqrt{3},0\right) \cup \left(\sqrt{3},+\infty\right)$$

$$f < 0 \text{ en } \left(-\infty,-\sqrt{3}\right) \cup \left(0,\sqrt{3}\right)$$

	$-\infty$ a $-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$ a 0	0 a $\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$ a $+\infty$
$x+\sqrt{3}$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-\sqrt{3}$	$-$	$-$	$-$	$+$
f	$-$	$+$	$-$	$+$

2.º Simetría.

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$, por lo que f es impar y, por tanto, su gráfica simétrica respecto del origen de coordenadas.

3.º Límites en el infinito. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

4.º Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos.

Se hallan los puntos de tangente horizontal y se estudia el signo de la primera derivada,

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1) \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ sólo si } x = -1 \text{ o } x = 1$$

En la tabla se estudia el signo de $f'(x)$ y se indica el carácter creciente o decreciente de f.

De los datos de la tabla también se deduce que f posee un mínimo relativo en el punto $\left(1, f(1)\right) = (1, -2)$, y un máximo relativo en $\left(-1, f(-1)\right) = (-1, 2)$.

Todas las características encontradas en el estudio anterior se reflejan en la gráfica dada en el enunciado.

	$-\infty$ a -1	-1 a 1	1 a $+\infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Ejercicios Propuestos: 7 página 209. Podéis apoyaros de la calculadora gráfica oficial

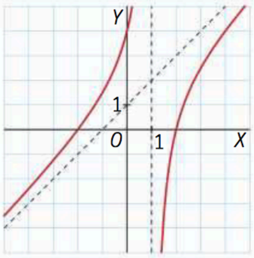
https://www.geogebra.org/graphing?lang=es

3. Representación de funciones racionales.

Funciones. Límites y Continuidad. Derivadas. Funciones elementales

EJERCICIO RESUELTO

12. Realiza el estudio de la función racional $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}$ y comprueba los resultados con su gráfica.



1.º Dominio y continuidad.

El denominador se anula para $x=1 \Rightarrow D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$. La función es continua en su dominio.

2.º Cortes con los ejes y signo.

- Con el eje Y: $f(0)=4$, es decir, f corta el eje Y en $(0, 4)$.
- Con el eje X: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=-2$ y $x=2 \Rightarrow$ f corta el eje X en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

El signo de f, cuya variación está fijada por las raíces del numerador y del denominador: $x=-2$, $x=1$ y $x=2$, se muestra en la tabla derecha por intervalos.

	$-\infty$ a -2	-2 a 1	1 a 2	2 a $+\infty$
$x+2$	−	+	+	+
$x-1$	−	−	+	+
$x-2$	−	−	−	+
f	−	+	−	+

3.º Simetrías.

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2-4}{(-x)-1}=\dfrac{x^2-4}{-x-1}$ distinto de $f(x)$ y de $-f(x)$, por lo que f no es ni par ni impar.

4.º Asíntotas.

- Verticales: Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=1$ es una asíntota vertical.
- Horizontales: No tiene, porque $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$.
- Oblicuas: Sí tiene porque cumple la condición de los grados. Para calcularla se divide:

$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}=x+1-\dfrac{3}{x-1}$. La asíntota oblicua es la recta $y=x+1$.

5.º Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos.

$f'(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{(x-1)^2}$. El numerador es siempre positivo por lo que $f'(x)>0$ para $x\in D(f)$ y la función es siempre creciente en su dominio y no presenta máximos ni mínimos relativos.

Todos estos datos coinciden con lo representado en la gráfica de la función.

Ejercicios Propuestos: 13 página 211. Podéis apoyaros de la calculadora gráfica oficial

https://www.geogebra.org/graphing?lang=es

Ejercicios Propuestos: 46 y 49 página 224.

Funciones. Límites y Continuidad. Derivadas. Funciones elementales

Solución Ficha: Dominios.

Ficha: Dominios de funciones elementales

1.
a) $D(f) = \mathbb{R}$
b) $D(f) = \mathbb{R}$
c) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
d) $D(f) = \mathbb{R} - \{-7\}$
e) $D(f) = \mathbb{R} - \{1, -1\}$
f) $D(f) = \mathbb{R} - \{-5, 3\}$
g) $D(f) = [0, +\infty)$
h) $D(f) = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$
i) $D(f) = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$
j) $D(f) = (-\infty, -5] \cup [-2, +\infty)$
k) $D(f) = \mathbb{R}$
l) $D(f) = [0, +\infty)$
m) $D(f) = (-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$
n) $D(f) = (0, +\infty)$
o) $D(f) = \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$
p) $D(f) = (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$

2.
a) $D(f) = (-1, +\infty)$
b) $D(f) = \mathbb{R} - \{-5\}$
c) $D(f) = (4, +\infty)$
d) $D(f) = \left(-4, -\frac{7}{2}\right) \cup (5, +\infty)$
e) $D(f) = (-\infty, -10) \cup (10, +\infty)$
f) $D(f) = (-\infty, -1] \cup [11, +\infty)$
g) $D(f) = \mathbb{R} - \{9\}$
h) $D(f) = (-\infty, -7) \cup (1, +\infty)$

Solución Ficha: Derivadas.

1. **a)** $f(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x$

b) $f(x) = -5x^4 + 10x^3 - 6x^2 + x - \dfrac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = -20x^3 + 30x^2 - 12x + 1$

c) $f(x) = (x+4)\cdot(2x^2 - 2) \Rightarrow f'(x) = 1\cdot(2x^2 - 2) + (x+4)\cdot(4x) = 2x^2 - 2 + 4x^2 + 16x = 6x^2 + 16x - 2$

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x - 1 - (x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

e) $f(x) = \dfrac{4x^3 + 9x^2}{3x+5} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(12x^2 + 18x)\cdot(3x+5) - (4x^3 + 9x^2)\cdot(3)}{(3x+5)^2} = \dfrac{24x^3 + 87x^2 + 90x}{(3x+5)^2}$

f) $f(x) = \sqrt{16x+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(16x+1)'}{2\sqrt{16x+1}} = \dfrac{16}{2\sqrt{16x+1}} = \dfrac{8}{\sqrt{16x+1}}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{-x^2+5} \Rightarrow f(x) = (-x^2+5)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3}(-x^2+5)^{1-\frac{1}{3}}\cdot(-2x) = \dfrac{-2x}{3\cdot(-x^2+5)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{-2x}{3\sqrt[3]{(-x^2+5)^2}}$

h) $f(x) = \sqrt[12]{3x^{10} + \dfrac{1}{3}x^9 - \dfrac{5}{6}x^8 + 7x^3 + 19} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(30x^9 + 3x^8 - \dfrac{20}{3}x^7 + 21x^2)}{12\sqrt[12]{(3x^{10} + \dfrac{1}{3}x^9 - \dfrac{5}{6}x^8 + 7x^3 + 19)^{11}}}$

i) $f(x) = \log(3x-2) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(3x-2)'}{\ln 10\cdot(3x-2)} = \dfrac{3}{\ln 10\cdot(3x-2)}$

j) $f(x) = \log e^x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{e^x}{\ln 10\cdot e^x} = \dfrac{1}{\ln 10}$

Funciones. Límites y Continuidad. Derivadas. Funciones elementales

k) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{10x+4}{10x-4}} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\left(\sqrt{\dfrac{10x+4}{10x-4}}\right)'}{\sqrt{\dfrac{10x+4}{10x-4}}}=\dfrac{\dfrac{\left(\dfrac{10x+4}{10x-4}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{10x+4}{10x-4}}}}{\sqrt{\dfrac{10x+4}{10x-4}}}=\dfrac{\dfrac{10\cdot(10x-4)-(10x+4)\cdot 10}{(10x-4)^2}}{2\cdot\left(\dfrac{10x+4}{10x-4}\right)} \Rightarrow$

$$f'(x)=\frac{-80}{2\cdot(10x+4)\cdot(10x-4)}=\frac{-40}{100x^2-16}=\frac{-10}{25x^2-4}$$

l) $f(x)=\sqrt{\ln\dfrac{10x+4}{10x-4}} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\left(\ln\dfrac{10x+4}{10x-4}\right)'}{2\cdot\sqrt{\ln\dfrac{10x+4}{10x-4}}}=\dfrac{\dfrac{\dfrac{10\cdot(10x-4)-(10x+4)\cdot 10}{(10x-4)^2}}{\dfrac{10x+4}{10x-4}}}{2\cdot\sqrt{\ln\dfrac{10x+4}{10x-4}}}=\dfrac{\dfrac{-80}{(10x+4)(10x-4)}}{2\cdot\sqrt{\ln\dfrac{10x+4}{10x-4}}}=$

$$=\frac{-40}{(100x^2-16)\cdot\sqrt{\ln\dfrac{10x+4}{10x-4}}}=\frac{-10}{(25x^2-4)\sqrt{\ln\dfrac{10x+4}{10x-4}}}$$

ñ) $f(x)=\text{sen}(6x+2) \Rightarrow f'(x)=6\cdot\cos(6x+2)$

p) $f(x)=\text{tg}\dfrac{3}{x}+\text{tg}\dfrac{x}{3} \Rightarrow f'(x)=\left(1+\text{tg}^2\dfrac{3}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{-3}{x^2}\right)+\left(1+\text{tg}^2\dfrac{x}{3}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{-3}{x^2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{x^2}\text{tg}^2\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{3}\text{tg}^2\dfrac{x}{3}$

t) $f(x)=\text{sen}(-5x^2+10) \Rightarrow f'(x)=-10x\cos(-5x^2+10)$

u) $f(x)=\cos\sqrt{x+1} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\text{sen}\sqrt{x+1}$

w) $f(x)=\ln\dfrac{1}{3x}+7x^2 \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\dfrac{-1}{9x^2}}{\dfrac{1}{3x}}+14x=-\dfrac{1}{3x}+14x$

x) $f(x)=\cos(\cos x) \Rightarrow f'(x)=-(\cos x)'\cdot(\text{sen}(\cos x))=(\text{sen}\,x)\cdot(\text{sen}(\cos x))$

y) $f(x)=6(\ln x)^2-10\ln x+2 \Rightarrow f'(x)=\dfrac{12}{x}\ln x-\dfrac{10}{x}$

Funciones. Límites y Continuidad. Derivadas. Funciones elementales

2. a) $f(x)=e^{4x+9}+\ln(4x+9)\Rightarrow f'(x)=4e^{4x+9}+\dfrac{4}{4x+9}$

b) $f(x)=\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x+1}\Rightarrow f'(x)=\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x+1}\cdot\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

c) $f(x)=\cos^3\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=3\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos^2\sqrt{x}=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}\cos^2\sqrt{x}$

d) $f(x)=\operatorname{sen}^2(x^2+3x-1)\Rightarrow f'(x)=2\cdot(4x+3)\cdot\operatorname{sen}(x^2+3x-1)\cdot\cos(x^2+3x-1)$

e) $f(x)=\log\left(\log\dfrac{1}{x}\right)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{\left(\log\dfrac{1}{x}\right)'}{\ln 10\cdot\log\dfrac{1}{x}}=\dfrac{\dfrac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x}}}{\ln 10\cdot\log\dfrac{1}{x}}=\dfrac{-1}{x\ln 10\cdot\log\dfrac{1}{x}}$

f) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{\left(\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}}\right)'}{\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}}}=\dfrac{\dfrac{\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}\right)'}{2\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}}}}{\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}}}=\dfrac{\dfrac{\operatorname{tg}^2x(1-\operatorname{tg}x)+\operatorname{tg}^2x(1+\operatorname{tg}x)}{(1-\operatorname{tg}x)^2}}{2\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}\right)}=\dfrac{\operatorname{tg}^2x}{1-\operatorname{tg}^2x}$

g) $f(x)=(1-\arccos x)\cdot(1+\arccos x)\Rightarrow f(x)=1-\arccos^2x\Rightarrow f'(x)=-2\cdot\arccos x\cdot\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

h) $f(x)=\dfrac{8x^4+5x^3+x^2}{\operatorname{sen}(x^2+x+3)}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(32x^3+15x^2+2x)\cdot\operatorname{sen}(x^2+x+3)-(8x^4+5x^3+x^2)\cdot(2x+1)\cdot\cos(x^2+x+3)}{\operatorname{sen}^2(x^2+x+3)}$

i) $f(x)=(\operatorname{arctg}(x+1))^{x+1}\Rightarrow f'(x)=(\operatorname{arctg}(x+1))^{x+1}.\ln\operatorname{arctg}(x+1)$

j) $f(x)=\sqrt[100]{\ln x^2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{100}\cdot(\ln x^2)'\cdot(\ln x^2)^{\frac{99}{100}}=\dfrac{\frac{2x}{x^2}}{100\sqrt[100]{(\ln x^2)^{99}}}=\dfrac{1}{50x\sqrt[100]{(\ln x^2)^{99}}}$

k) $f(x)=\dfrac{1-\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-\cos x(1+\operatorname{sen}x)-\cos x(1-\operatorname{sen}x)}{(1+\operatorname{sen}x)^2}=\dfrac{-2\cos x}{(1+\operatorname{sen}x)^2}$

l) $f(x)=\sqrt{\cos^2x-\cos x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(\cos^2x-\cos x)'}{2\sqrt{\cos^2x-\cos x}}=\dfrac{-2\cos x\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}x}{2\sqrt{\cos^2x-\cos x}}$

m) $f(x)=\sqrt{\cos 3\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{\left(3\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)\right)'}{2\sqrt{\cos 3\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)}}=\dfrac{3(x\sec^2x-\operatorname{tg}x)}{2x^2\sqrt{\cos 3\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)}}$

n) $f(x)=\dfrac{\cos(\ln x)}{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}\operatorname{sen}(\ln x)\cdot x-\cos(\ln x)}{x^2}=\dfrac{-\operatorname{sen}(\ln x)-\cos(\ln x)}{x^2}$

ñ) $f(x)=\ln(x-3)\cdot(x+3)\Rightarrow f(x)=\ln(x^2-9)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-9}$

o) $f(x)=\left(\dfrac{\ln x}{2x}\right)^{\operatorname{tg}x}\Rightarrow f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{2x}\right)^{\operatorname{tg}x}\cdot\sec^2x\cdot\ln\dfrac{\ln x}{2x}$

p) $f(x)=\cos(-x^3+\ln x^2)\Rightarrow f'(x)=-\left(-3x^2+\dfrac{2x}{x^2}\right)\cdot\operatorname{sen}(-x^3+\ln x^2)=\left(3x^2-\dfrac{2}{x}\right)\cdot\operatorname{sen}(-x^3+\ln x^2)$

q) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-10x}{x^4-2}}+6x^2-12\Rightarrow f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{-10x}{x^4-2}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{-10x}{x^4-2}}}+12x=\dfrac{30x^4+20}{2(x^4-2)^2\sqrt{\dfrac{-10x}{x^4-2}}}+12x=\dfrac{15x^4+10}{(x^4-2)^2\sqrt{\dfrac{-10x}{x^4-2}}}+12x$